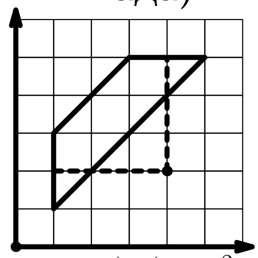
Московская олимпиада школьников
(Объединенная межвузовская математическая олимпиада)
Примерные решения



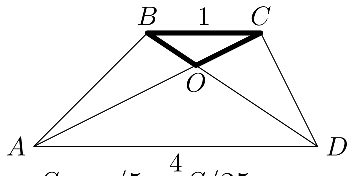
1. *Ответ:* $(4;2)$, $\sqrt{10}$.

Решение. Искомый центр лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.

2. *Решение.* По формуле сокращенного умножения $6255^3 - 5995^3 = (6255 - 5995) \cdot (6255^2 + 6255 \cdot 5995 + 5995^2) = 260 \cdot (\dots) = 13 \cdot 20 \cdot (\dots)$.

3. *Ответ:* В 3 раза.

Решение. Пусть скорость Гарри — v, а крысы — u. Тогда скорость дракона — $5v$, а расстояние между Гарри и крысой в начале погони — $(5v+u)\cdot 0{,}5$. Так как Гарри догнал крысу через 4 минуты, $4(v-u) = (5v+u)\cdot 0{,}5$, откуда $u = 3v$.



4. *Ответ:* $S/25$.

Решение. $S_{ABC} = S/5$, так как $S_{ABC}/S_{ACD} = 1/4$ (высота общая, основания относятся как $1:4$). Треугольники BOC и DOA подобны с отношением $1:4$, поэтому $CO/CA = 1/5$, а значит, $S_{BOC} = S_{ABC}/5 = S/25$.

5. *Ответ:* $3 + 3^{-2009}$.

Решение. Посмотрим, что происходит при применении f к некоторому числу. Заметим, что $f(x) - 3 = \frac{x}{3} - 1 = \frac{x-3}{3}$, т. е. каждое применение f сокращает расстояние от числа до 3 в три раза. Для $x = 4$ оно было равно 1, а значит, после 2009 применений f это расстояние станет равным 3^{-2009}. Соответственно, само число станет равным $3 + 3^{-2009}$.

Можно решать задачу и по-другому:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + x/3;\\ f(f(x)) &= 2 + 2/3 + x/9;\\ f(f(f(x))) &= 2 + 2/3 + 2/9 + x/27;\\ &\dots\\ \underbrace{f(\dots f(f}_{2009}(x))\dots) &= (2 + 2/3 + \dots + 2/3^{2008}) + x/3^{2009}. \end{aligned}$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии, последнее выражение равно $2\cdot\dfrac{1 - 1/3^{2009}}{1 - 1/3} + x/3^{2009} = 3 + (x-3)/3^{2009}$. Подставляя $x = 4$, получаем ответ.

6. *Ответ:* 16.

Решение. $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_n = a_1 + (n-1)d$ (a_i — i-й член прогрессии, d — ее разность, n — искомое число членов). Из условия следует, что $(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 6d)$, $(a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + (n-1)d)$. Из первого уравнения находим, что $a_1 = -\frac{3}{2}d$. Подставляя во второе уравнение, находим $(9d/2)^2 = \frac{3}{2}d((n-1)d - 3d/2)$, откуда $2n - 5 = 27$, а $n = 16$.

7. *Решение.* Пусть строны треугольника имеют длины a, b и c, а соответствующие высоты — h_a, h_b и h_c. Вычисляя площадь треугольника разными способами, получаем, что $2S = (a+b+c)r = ah_a = bh_b = ch_c$, откуда (так как $r = 1$) $h_a = (a+b+c)/a$ (аналогично для остальных высот). Значит, $1/h_a + 1/h_b + 1/h_c = 1$. Последнее уравнение имеет в натуральных числах только три решения (с точностью до перестановки): $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$ и $(3, 3, 3)$. Первые два из них дают a, b и c, не удовлетворяющие неравенству треугольника: $(S, S/2, S/2)$ и $(S, 2S/3, S/3)$. Оставшийся случай соответствует правильному треугольнику со стороной $2\sqrt{3}$ (которая находится из радиуса вписанной окружности).

8. *Ответ:* 0.

Решение. Заметим, что если x корень данного уравнения, то и $-x$ его корень. Так как значения функции $f(x) = 2\cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0$ имеют разные знаки в концах отрезка $[0; 2\pi/3]$, корни у него есть, и в силу предыдущего замечания, их сумма на отрезке $[-2\pi/3; 2\pi/3]$ равна нулю. Осталось показать, что на промежутке $(2\pi/3; 3\pi/4]$ корней нет. Но действительно, на этом промежутке $2\pi < 3x \leq 2\pi + \pi/4$, поэтому $\cos 3x \geq 1/\sqrt{2}$; а $|\sin x| \geq 1\sqrt{2}$; значит, $f(x) > 2 \cdot 1/\sqrt{2} + 8 \cdot 1/\sqrt{2} - 7 = 5\sqrt{2} - 7 > 0$.

9. *Ответ:* $\sqrt{2}/24$.

Решение. Проведем через противоположные ребра тетраэдра пары параллельных плоскостей. Получим, что наш тетраэдр вписан в куб со стороной $\sqrt{2}/2$. Тогда результат поворота — второй тетраэдр, вписанный в тот же куб. Их пересечение — многогранник, вершины которого — центры граней куба, т. е. октаэдр. Нетрудно подсчитать, что он занимает $1/6$ объема куба, т. е. $\sqrt{2}/24$.

10. *Ответ:* $[25/17; 17]$.

Решение. Система неравенств описывает треугольник на плоскости XOY с вершинами $A(-4; 1)$, $B(-2; 3)$, $C(-1; -1)$.

Функция $x^2 + y^2$ — это квадрат расстояния до начала координат. Наименьшее значение она принимает на прямой BC. Функция $x^2 + (-4x - 5)^2 = 17x^2 + 40x + 25$ принимает наибольшее значение $25/17$ при $x = -20/17 \in [-2; -1]$ (соответствующая точка — это основание перпендикуляра, опущенного из O на BC, а значение — квадрат длины этого перпендикуляра). Наибольшее же значение — 17 — она принимает в точке A.