

В. А. Алексеева

Лицей при СПбГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Исследование одной комплекснозначной функции с помощью производных

Рассмотрим комплексную функцию угловой частоты ω :

$$\overset{\circ}{T}(\omega) = \frac{\frac{\omega_0 \omega}{Q} i}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0 \omega}{Q} i}$$

(здесь $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная угловая частота, а Q – добротность контура, или коэффициент резонанса). Наша задача – исследовать модуль и аргумент функции $\overset{\circ}{T}$.

. Пусть $f(\omega) = \left| \overset{\circ}{T}(\omega) \right| = \frac{h\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + h^2 \omega^2}}$, где через h обозначено отношение $\frac{\omega_0}{Q}$.

Функция f не имеет точек разрыва, не имеет корней, отличных от нулевого, и ось абсцисс является ее горизонтальной асимптотой:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} f(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + h^2}} = 0.$$

Вычислим производную функции $f(\omega)$:

$$f'(\omega) = \frac{h(\omega_0^4 - \omega^4)}{(\omega^4 + (h^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4)^{3/2}}.$$

Легко видеть, что на полуоси $\omega > 0$ функция f имеет единственную точку экстремума – максимум при $\omega = \omega_0$. Сам максимум равен 1.

Пусть далее $B = \frac{1}{6}(h^2 - 2\omega_0^2) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)\omega_0^2$, тогда

$$f'(\omega) = \frac{h(\omega_0^4 - \omega^4)}{(\omega^4 + 6B\omega^2 + \omega_0^4)^{3/2}}$$

и

$$f''(\omega) = \frac{2h\omega(\omega^6 - 3B\omega^4 - 5\omega_0^4\omega^2 - 9B\omega_0^4)}{(\omega^4 + 6B\omega^2 + \omega_0^4)^{5/2}}.$$

Ищем точки перегиба при $\omega > 0$, т. е. решаем уравнение $f''(\omega) = 0$. Если положить $t = \omega^2$, то получается кубическое уравнение $t^3 - 3Bt^2 - 5\omega_0^4t - 9B\omega_0^4 = 0$. Из теории кубических уравнений следует, что у него три вещественных корня, если выполнено неравенство $(7\omega_0^4B + B^3)^2 - \frac{(5\omega_0^4 + 3B^2)^3}{27} < 0$. Упростив это неравенство и выразив B через ω_0 и Q , получаем равносильное неравенство $2048Q^6 - 560Q^4 + 24Q^2 - 3 > 0$. У многочлена в левой части неравенства только два вещественных корня $\pm \frac{1}{2}$, поэтому если $Q > \frac{1}{2}$, то неравенство выполняется и мы имеем три вещественных корня кубического уравнения:

$$t_k = B + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{5\omega_0^4 + 3B^2} \cos \frac{\alpha + 2\pi k}{3},$$

$$\text{где } k = 0, 1, 2, \text{ а } \alpha = \arccos \frac{3\sqrt{3}(7\omega_0^4B + B^3)}{(5\omega_0^4 + 3B^2)^{3/2}} = \arccos \frac{(1 - 2Q^2)(256Q^4 - 4Q^2 + 1)}{(64Q^4 - 4Q^2 + 1)^{3/2}}.$$

Так как $B < 0$, то угол α лежит во второй четверти и $t_1 < 0$. Непосредственно проверяется, что всегда $t_0 = \frac{\omega_0^2}{6Q^2} \left(1 - 2Q^2 + 2\sqrt{64Q^4 - 4Q^2 + 1} \cos \frac{\alpha}{3} \right) > 0$, так как $\cos \frac{\alpha}{3} > \frac{1}{2}$. Таким образом, при $Q > \frac{1}{2}$ всегда есть точка перегиба

$$\omega = \sqrt{t_0} = \frac{\omega_0}{Q\sqrt{6}} \left(1 - 2Q^2 + 2\sqrt{64Q^4 - 4Q^2 + 1} \cos \frac{\alpha}{3} \right)^{1/2}.$$

Наличие второй точки перегиба (слева от максимума) $\omega = \sqrt{t_2}$ зависит от положительности $1 - 2Q^2 + 2\sqrt{64Q^4 - 4Q^2 + 1} \cos \frac{\alpha + 4\pi}{3}$, поскольку $0 < \cos \frac{\alpha + 4\pi}{3} < \frac{1}{2}$.

Перейдем к рассмотрению аргумента функции $\overset{\circ}{T}$. Перепишем $\overset{\circ}{T}$ в виде $\overset{\circ}{T}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} Qi}$. Получаем, что $\varphi(\omega) = \arg \overset{\circ}{T}(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} Q\right)$.

Поведение функции $\varphi(\omega)$ на границах:

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2},$$

причем горизонтальная прямая $y = -\frac{\pi}{2}$ является асимптотой функции $\varphi(\omega)$.

У этой функции единственный корень на положительной полуоси: $\omega = \omega_0$.

Вычислим производную функции $\varphi(\omega)$:

$$\varphi'(\omega) = -\frac{2\omega_0 \omega}{\omega^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4 + \omega_0^2}.$$

Так как знаменатель всегда положителен, то $\varphi(\omega)$ строго убывает на полуоси $\omega > 0$.

Вычислим вторую производную функции $\varphi(\omega)$:

$$\varphi''(\omega) = \frac{2\omega_0 (3\omega^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 - \omega_0^4 - \omega_0^2)}{(\omega^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4 + \omega_0^2)^2}.$$

У многочлена в числителе один вещественный положительный корень:

$\omega = \frac{1}{3} \sqrt{3\omega_0 (\sqrt{4\omega_0^2 + 3} + \omega_0)}$, это и есть абсцисса единственной точки перегиба, в

которой выпуклость вверх сменяется выпуклостью вниз. Ордината точки перегиба

выражается формулой $y = -\arctg \frac{\sqrt{4\omega_0^2 + 3} - 2\omega_0}{3}$.