В. А. Алексеева

Лицей при СПбГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Цепи синусоидального тока и комплексные числа

Изображение тока и других функций времени векторами и комплексными числами

Расчет цепей переменного тока значительно облегчается. если изображать синусоидально изменяющиеся токи, напряжения, ЭДС и т. д. векторами или комплексными числами.

Мгновенное значение синусоидального тока определяется выражением

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right),$$

где I_m – максимальное значение или амплитуда тока. Аргумент синуса $\frac{2\pi}{T}t + \varphi$ называется фазой. Угол φ равен фазе в начальный момент времени ($t = 0$) и поэтому называется начальной фазой. Так как синус периодическая функция с периодом 2π, то обычно значение фазы находится в пределах $\pm\pi$ или в пределах от 0 до 2π. В течение периода T фаза увеличивается на 2π. Величина $\frac{2\pi}{T}$ показывает скорость изменения фазы и обозначается буквой ω. Принимая во внимание, что частота $f = \frac{1}{T}$, можно написать

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \ .$$

Это выражение, связывающее ω и f, послужило основанием называть ω угловой частотой. Измеряется ω числом радианов, на которое увеличивается фаза в секунду.

Итак, предположим, что ток изменяется по синусоидальному закону:

$$I = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Возьмем декартову прямоугольную систему координат. Расположим под углом φ относительно оси абсцисс вектор $\vec{I}_m$, длина которого в выбранном масштабе равна амплитуде I_m (от знака φ, естественно, зависит, против или по часовой стрелке откладывается этот угол). Представим себе, что вектор $\vec{I}_m$ с момента $t = 0$ начинает вращаться вокруг начала координат O против направления движения часовой стрелки с постоянной угловой скоростью, равной угловой частоте ω. В момент времени t вектор составит с осью абсцисс угол $\omega t + \varphi$. Его проекция на ось ординат равна в выбранном масштабе мгновенному значению тока I. На этом основании вектор $\vec{I}_m$ называют вектором тока.

Совершенно так же определяются векторы напряжения, ЭДС, магнитного потока и т. д. Конечно, эти векторы имеют смысл, отличный от смысла векторов, определяющих физические величины в пространстве, к которым относятся векторы силы, скорости, ускорения, напряженности электрического поля и т. п.

Если рассматривать оси координат в качестве действительной и мнимой осей координат на комплексной плоскости, то вектор $\vec{I}_m$ соответствует комплексному числу, модуль которого равен I_m и аргумент – углу φ. Это комплексное число $\overset{\circ}{I}_m$ называется комплексной амплитудой тока.

Если вектор $\vec{I}_m$, начиная с момента времени $t = 0$, вращается против направления движения часовой стрелки с угловой скоростью ω, то ему соответствует комплексная функция времени, которая называется мгновенным значением тока в комплексной форме:

$$\overset{\circ}{I} = I_m \left(\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)\right).$$

Значение ее мнимой части равно синусоидально изменяющемуся току I:

$$I = \operatorname{Im} \overset{\circ}{I} .$$

Аналогично для напряжения получается равенство:

$$U = \operatorname{Im} \overset{\circ}{U} = U_m \sin(\omega t + \varphi) .$$

Метод расчета цепей синусоидального тока, основанный на изображении периодических функций времени комплексными числами, был введен в электротехнику американским ученым Ч. П. Штейнметцем и называется методом комплексных амплитуд.

Пример 1. Написать комплексную амплитуду тока $I = 2\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ А.

Решение. Комплексная амплитуда $\overset{\circ}{I}_m = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$.

Пример 2. Комплексная амплитуда напряжения $\overset{\circ}{U}_m = -10 + 10i$ В, частота $f = 100$ Гц. Написать выражение для мгновенного напряжения.

Решение. Перепишем $\overset{\circ}{U}_m$ в тригонометрической форме: $\overset{\circ}{U}_m = = 10\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Угловая частота $\omega = 2\pi f =$ $= 2\pi \cdot 100 = 200\pi$ рад/с. Таким образом, мгновенное значение напряжения $U = = 10\sqrt{2}\sin\left(200\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \approx 14{,}14\sin(628{,}32t + 2{,}36)$ В.

Токи и напряжения при соединении резистивного, индуктивного и емкостного элементов

Ниже рассматриваются линейные цепи, содержащие источники энергии с синусоидальными ЭДС, причем частоты ЭДС всех источников одинаковы. Кроме того, рассматриваются только *установившиеся режимы* цепей, которые наступают после некоторого промежутка времени (обычно от долей секунды до нескольких секунд) после окончания всех коммутаций в цепи. При установившемся режиме токи и напряжения во всех ветвях и участках линейных цепей также синусоидальные и изменяются с той же частотой, что и ЭДС источников энергии.

Для комплексных токов и напряжений имеют место следующие законы Кирхгофа:

Алгебраическая сумма комплексных токов в проводниках, соединенных в узел, равна нулю.

Алгебраическая сумма комплексных напряжений на всех элементах любого замкнутого контура схемы равна нулю.

Ток и напряжения при последовательном соединении

Пусть в цепи (рис. 1), состоящей из последовательно соединенных элементов R, L и C, т. е. в последовательном контуре, известен ток

$$I = I_m \sin\left(\omega t + \varphi_I\right).$$

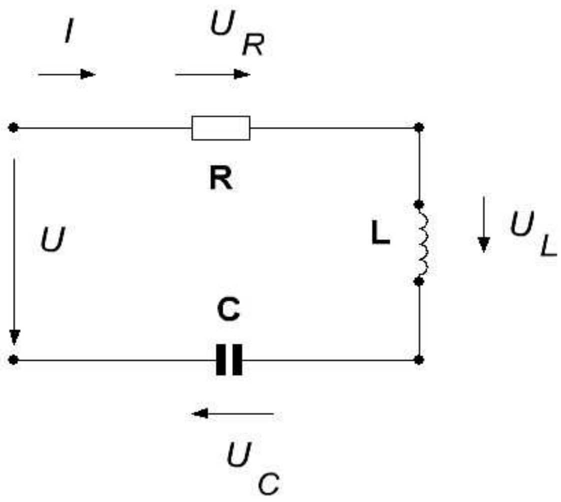

Рис. 1

Выясним, каково напряжение U на выводах контура. Напряжения на отдельных элементах следующие:

$$U_R = RI = RI_m \sin\left(\omega t + \varphi_I\right);$$

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = \omega L I_m \cos\left(\omega t + \varphi_I\right) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \varphi_I + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$U_C = \frac{1}{C}\int I dt = -\frac{I_m}{\omega C}\cos\left(\omega t + \varphi_I\right) = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\omega t + \varphi_I - \frac{\pi}{2}\right).$$

Постоянная интегрирования в выражении для U_C принята равной нулю, так как в установившемся режиме, как уже отмечалось, напряжение на любом участке цепи синусоидальное.

Запишем комплексный ток и комплексные напряжения на основании выражений для их мгновенных значений:

$$\overset{\circ}{I} = I_m\left(\cos(\omega t + \varphi_I) + i\sin(\omega t + \varphi_I)\right);$$

$$\overset{\circ}{U}_R = RI_m\left(\cos(\omega t + \varphi_I) + i\sin(\omega t + \varphi_I)\right) = R\overset{\circ}{I};$$

$$\overset{\circ}{U}_L = \omega L I_m\left(\cos\left(\omega t + \varphi_I + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\omega t + \varphi_I + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \omega L I_m \left(\cos(\omega t + \varphi_I) + i\sin(\omega t + \varphi_I)\right)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\omega L \overset{\circ}{I};$$

$$\overset{\circ}{U}_C = \frac{I_m}{\omega C}\left(\cos\left(\omega t + \varphi_I - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\omega t + \varphi_I - \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{I_m}{\omega C}\left(\cos(\omega t + \varphi_I) + i\sin(\omega t + \varphi_I)\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i\frac{1}{\omega C}\overset{\circ}{I} = \frac{1}{i\omega C}\overset{\circ}{I}.$$

Сравнивая выражения для мгновенных напряжений U_L и U_C с комплексными напряжениями $\overset{\circ}{U}_L$ и $\overset{\circ}{U}_C$, можно установить удобное правило перехода от производной и интеграла синусоидальной функции времени к изображающим их комплексным величинам: *синусоидальная функция заменяется изображающей ее комплексной величиной, дифференцирование заменяется умножением на* $i\omega$*, а интегрирование – делением на* $i\omega$*.*

В силу второго закона Кирхгофа для комплексных напряжений

$$\overset{\circ}{U} = \overset{\circ}{U}_R + \overset{\circ}{U}_L + \overset{\circ}{U}_C,$$

получаем уравнение:

$$\overset{\circ}{U} = R\overset{\circ}{I} + i\omega L\overset{\circ}{I} + \frac{1}{i\omega C}\overset{\circ}{I},$$

или

$$\overset{\circ}{U} = \left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right)\overset{\circ}{I}.$$

Это соотношение между комплексным напряжением и током называется законом Ома в комплексной форме.

Перейдем к тригонометрической форме комплексных величин:

$$\overset{\circ}{U} = U_m\left(\cos(\omega t + \varphi_U) + i\sin(\omega t + \varphi_U)\right);$$

$$R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)i = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),$$

где

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Учитывая, что $\overset{\circ}{I} = I_m\left(\cos(\omega\, t + \varphi_I) + i\sin(\omega\, t + \varphi_I)\right)$, получаем амплитуду и начальную фазу напряжения U :

$$U_m = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_m, \quad \varphi_U = \varphi_I + \psi.$$

Таким образом, выражение для мгновенного напряжения в рассматриваемом случае имеет вид:

$$U = U_m \sin(\omega\, t + \varphi_I + \psi).$$

Напряжение и токи при параллельном соединении

Пусть к цепи (рис. 2), схема которой состоит из параллельного соединения элементов R, L и C, приложено напряжение

$$U = U_m \sin\left(\omega\, t + \varphi_U\right).$$

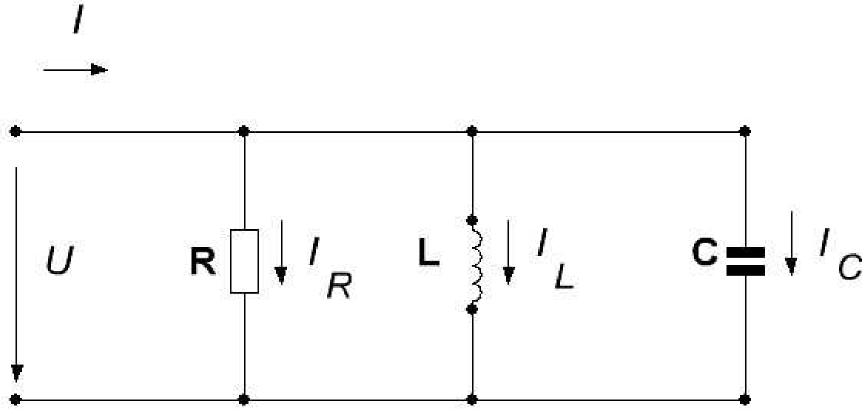

Рис. 2

Определим токи в цепи.

По первому закону Кирхгофа для комплексных токов

$$\overset{\circ}{I} = \overset{\circ}{I}_R + \overset{\circ}{I}_L + \overset{\circ}{I}_C.$$

Вводя для заданного синусоидального напряжения изображающее его комплексное напряжение $\overset{\circ}{U} = U_m\left(\cos(\omega\, t + \varphi_U) + i\sin(\omega\, t + \varphi_U)\right)$, применим для каждой ветви закон Ома в комплексной форме. В результате получим:

$$\overset{\circ}{I}_R = \frac{\overset{\circ}{U}}{R} = \frac{U_m}{R}\left(\cos(\omega\, t + \varphi_U) + i\sin(\omega\, t + \varphi_U)\right);$$

$$\overset{\circ}{I}_L = \frac{\overset{\circ}{U}}{i\omega L} = \frac{U_m}{\omega L}\left(\cos\left(\omega\, t + \varphi_U - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\omega\, t + \varphi_U - \frac{\pi}{2}\right)\right);$$

$$\overset{\circ}{I}_C = \frac{\overset{\circ}{U}}{1/(i\omega C)} = i\omega C\overset{\circ}{U} = \omega C U_m\left(\cos\left(\omega\, t + \varphi_U + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\omega\, t + \varphi_U + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Подставив выражения комплексных токов в уравнение первого закона Кирхгофа, найдем, что

$$\overset{\circ}{I} = \frac{\overset{\circ}{U}}{R} + \frac{\overset{\circ}{U}}{i\omega L} + i\omega C\overset{\circ}{U},$$

или

$$\overset{\circ}{I} = \left(\frac{1}{R} - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)i\right)\overset{\circ}{U}.$$

Перейдем к тригонометрической форме комплексных величин:

$$\frac{1}{R} - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)i = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}\left(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)\right),$$

где

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1/(\omega L) - \omega C}{1/R}.$$

Аргумент комплексной величины обозначен через $-\psi$, так как мы, как и раньше, считаем, что разность фаз $\psi = \varphi_U - \varphi_I$.

Учитывая выражение для $\overset{\circ}{U}$, получаем амплитуду и начальную фазу тока I:

$$I_m = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}\,U_m, \quad \varphi_I = \varphi_U - \psi.$$

На основании этих данных:

$$I = I_m \sin(\omega\, t + \varphi_U - \psi).$$

Параллельное соединение резистивного и емкостного элементов

Как было показано выше, при параллельном соединении элементов R и C комплексные ток и напряжение связаны уравнением

$$\overset{\circ}{I} = \left(\frac{1}{R} + \omega C i\right)\overset{\circ}{U}.$$

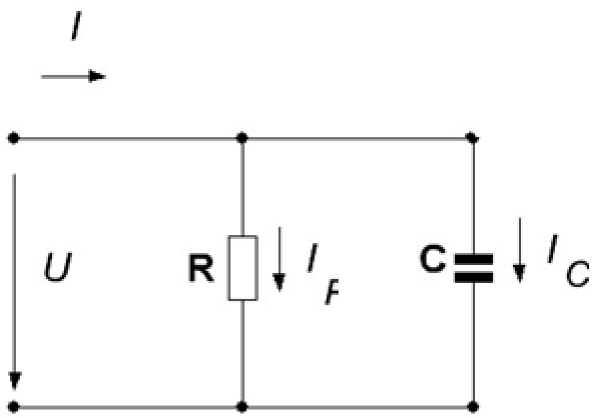

Рис. 3

Следовательно,

$$\overset{\circ}{U} = \frac{1}{1 + i\omega RC} R\overset{\circ}{I} = \frac{\omega_0}{\omega_0 + i\omega} R\overset{\circ}{I} = R\overset{\circ}{T}\overset{\circ}{I},$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{T} = \frac{\omega_0}{\omega_0 + i\omega}.$$

Рассмотрим подробнее поведение комплекснозначной функции $\overset{\circ}{T}$, перейдя к тригонометрической форме:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2}(\omega_0 - \omega i) = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}}\left(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)\right).$$

Как и ранее, разность фаз $\psi = \varphi_U - \varphi_I$, равная аргументу функции $\overset{\circ}{T}$, умноженному на -1, определяется уравнением

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{\omega C}{1/R} = -\frac{\omega}{\omega_0}$$

и, если ограничиться промежутком $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\psi = -\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_0}.$$

Пример 3. Найти те значения частоты ω, при которых модуль $|\mathring{T}| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$.

Решение. Поскольку $|\mathring{T}| = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}$, решим неравенство $\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как $\omega_0 > 0$, то возводя неравенство в квадрат, получаем $\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2} \leqslant \frac{1}{2}$. Далее $2\omega_0^2 \leqslant \omega_0^2+\omega^2$, откуда немедленно следует, что $\omega \geqslant \omega_0$.

Пример 4. Найти те значения частоты ω, при которых разность фаз $\psi \leqslant -\frac{\pi}{4}$.

Решение. Решаем неравенство $-\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_0} \leqslant -\frac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_0} \geqslant \frac{\pi}{4},$$

затем, поскольку арктангенс – строго возрастающая функция,

$$\frac{\omega}{\omega_0} \geqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

откуда, как и в примере 1, получаем неравенство $\omega \geqslant \omega_0$.